

# Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes pour des surfaces à contours rectilignes

Fouad Erchiqui \*, G. Dituba Ngoma

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, DSA, 445 boulevard de l'Université, Rouyn-Noranda (Québec), J9X 5E4, Canada

Reçu le 1<sup>er</sup> octobre 2005 ; accepté le 7 juin 2006

Disponible sur Internet le 22 août 2006

## Résumé

Le problème de transfert de chaleur radiative entre deux surfaces diffuses placées arbitrairement dans un milieu transparent se ramène au calcul de la valeur de la surface de radiation mutuelle. Dans le cas de deux surfaces arbitraires très voisines, le calcul numérique de la valeur de la surface de radiation mutuelle conduit à des résultats divergents. Dans cet article, nous présentons, d'une part, une technique, basée sur la méthode de contour, qui évite le problème de singularité, tout en réduisant le nombre d'opérations de calcul numérique et, d'autre part, une analyse comparative de cette technique avec d'autres méthodes classiques.

© 2006 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

The radiative transfer problem of heat between two diffuse surfaces placed arbitrarily in a transparent medium is reduced to the calculation of the surface value of mutual radiation. In the case of two very neighbour's arbitrary surfaces, the numerical calculation of the value of the surface of mutual radiation leads to divergent results. In this article, we present, on one hand, a technique based on the method of contour which avoids the problem of singularity while reducing the number of numerical arithmetic operations and, on the other hand, a comparative analysis of this method with other traditional methods.

© 2006 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Facteur de forme ; Semi-analytique ; Contour ; Numérique

*Keywords* : View factor; Semi-analytical; Boundary; Numerical

## 1. Introduction

L'étude du transfert de chaleur par rayonnement dans les installations thermiques est d'une importance majeure pour plusieurs applications industrielles. À titre d'exemple, dans le procédé de thermoformage de matériaux thermoplastiques, la mise en température rapide du matériau jusqu'à l'état souhaité s'effectue par réchauffage dans un four à rayonnement infrarouge [1,2]. La répartition de la température dans la préforme polymérique a une grande influence sur la distribution d'épaisseur de l'objet formé [2]. Dans le cas des fours industriels, la fusion de blocs de métaux solides dépend principalement de la chaleur

radiative libérée par l'avancement des réactions chimiques de la combustion [3], ce qui a un effet sur le rendement de ces fours.

La prédiction des énergies échangées par rayonnement, entre chaque paire de surfaces d'un système thermique donné, dépend, d'une part, des propriétés physiques de chaque surface du système et, d'autre part, du milieu environnant. Dans le cas d'un milieu ambiant transparent, le problème de calcul de l'échange de chaleur radiative entre deux surfaces  $i$  et  $j$  placées arbitrairement dans l'espace nous ramène à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle  $F_{ij}$  [4]. Le traitement analytique de  $F_{ij}$  n'est possible que pour des géométries simples [4,6–10].

L'introduction des méthodes numériques a permis de surmonter les difficultés associées aux calculs de  $F_{ij}$ , pour des formes arbitraires des surfaces à l'étude, en fournissant des approximations numériques. Dans le cas d'un milieu transparent,

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [fouad.erchiqui@uqat.ca](mailto:fouad.erchiqui@uqat.ca) (F. Erchiqui).

séparant deux surfaces radiatives diffuses, le calcul numérique de la surface radiative mutuelle se fait, généralement, soit à l'aide de la technique statistique de Monte Carlo [11] soit à l'aide d'intégration numérique [12–15]. Dans le cas d'intégration numérique, les formulations intégrales utilisées peuvent être classées en deux catégories : (i) formulation intégrale de surface [13,14] et (ii) formulation intégrale de contour [15]. Le calcul numérique de ces intégrales peut s'effectuer, par exemple, par l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss sur des éléments [16], dans le cas de la formulation intégrale de surface, ou sur des lignes [16], dans le cas de la formulation de contour. Contrairement à la méthode de Monte Carlo, lorsque deux surfaces ont des régions communes, ou très voisines, le noyau qui apparaît dans l'expression mathématique de la valeur de la surface radiative mutuelle diverge dans ces régions, et l'utilisation des formules d'intégrations numériques pour le calcul de  $F_{ij}$  conduit à des résultats trop peu précis, même si l'on utilise un très grand nombre de points de Gauss (voir les notes techniques [13] dans le cas des éléments triangulaires).

Dans cet article, nous présentons une technique semi-analytique, qui évite le problème de singularité pour le calcul de  $F_{ij}$ . Pour l'application de cette technique, nous procédons en deux étapes : la première étape consiste à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie singulière, alors que la seconde étape consiste à intégrer numériquement le résultat de la première étape. Pour la validation, nous avons étudié l'effet de la distance et de l'orientation de deux surfaces carrées unitaires (parallèles et perpendiculaires) sur le calcul de la valeur de la surface radiative  $F_{ij}$ . L'avantage de la méthode semi-analytique, pour le calcul de la valeur de la surface mutuelle, est double : (i) il contourne le problème de singularité et (ii) il réduit le temps de calcul, puisque l'intégration numérique s'effectue sur un seul contour de surface et non sur deux.

Ensuite, nous présentons une analyse comparative de la technique semi-analytique de calcul de  $F_{ij}$  avec différentes autres techniques numériques d'intégrations.

Finalement, nous utilisons la méthode semi-analytique de contour pour la construction de quelques abaques pour des paires de surfaces rectangles et des paires de surfaces triangles possédant un côté en commun.

## 2. Définition de la surface radiative mutuelle

La valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$  est définie par l'expression suivante [4] :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (1)$$

où  $r$  est la distance entre les éléments de surfaces  $dA_i$  et  $dA_j$  (voir Fig. 1). Les intégrales de surface qui interviennent dans (1) peuvent être remplacées par des intégrales de contour, en utilisant le théorème de Stokes, ce qui donne [15] :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r \, d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j \quad (2)$$

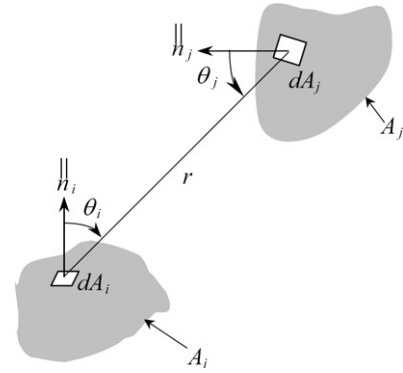


Fig. 1. Définition de la surface radiative mutuelle.

$r$  qui apparaît dans (2) représente cette fois-ci la distance entre les vecteurs positions  $\vec{r}_i$ , d'un point quelconque  $p$  appartenant au contour  $\partial A_i$  de la surface  $A_i$ , et  $\vec{r}_j$ , d'un point quelconque  $q$  appartenant au contour  $\partial A_j$  de la surface  $A_j$  :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

En général, pour évaluer le terme de l'intégrale de contour, on fait appel à une technique numérique sur des segments de droite. D'après la formule (2), ce terme prend alors la forme générale suivante :

$$I_{ij} = \int_{L_i} \int_{L_j} Q(r) dl_i dl_j \quad (4)$$

Dans le cas où les segments  $L_i$  et  $L_j$  n'ont pas d'intersection commune, et sont suffisamment éloignés l'un de l'autre, la distance  $r$  ne s'annule pas dans le domaine d'intégration et nous pouvons alors appliquer les techniques classiques d'intégrations numériques. Par contre, lorsque les segments ont des régions communes, ou très voisines l'un de l'autre, la fonction  $Q(r)$  peut alors être singulière dans son domaine d'intégration. En effet, nous nous trouvons dans cette situation à chaque fois que la distance  $r$  tend à s'annuler dans le domaine d'intégration. Dans ces conditions, l'utilisation des formules d'intégrations numériques, par exemple, la formule des quadratures de Gauss, pour le calcul de la valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$ , conduit à des résultats trop peu précis, même si l'on utilise un très grand nombre de points de Gauss.

### 2.1. Transformation des intégrales singulières

Pour évaluer la valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$  avec précision, nous procédons en deux étapes : la première consiste à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie singulière de  $Q(r)$  et la seconde consiste à intégrer numériquement le résultat de cette première étape. Pour cela, considérons la forme explicite de l'intégrale de contour (2) :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \left\{ \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} (\ln r \, dx_i \, dx_j + \ln r \, dy_i \, dy_j + \ln r \, dz_i \, dz_j) \right\} \quad (5)$$

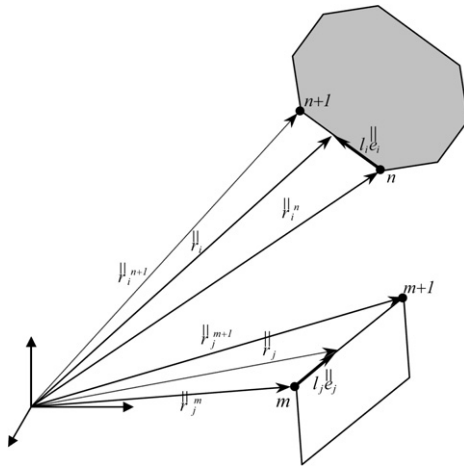


Fig. 2. Définition des vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$ .

Dans le cas où les lignes de contour des surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont rectilignes, les vecteurs positions  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$  peuvent s'écrire (voir Fig. 2) :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^n + l_i \vec{e}_i \tag{6}$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j^m + l_j \vec{e}_j \tag{7}$$

où  $l_i$  et  $l_j$  sont des mesures scalaires. Les vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement aux segments de contour  $L_i$  et  $L_j$  (voir Fig. 2) :

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_i^{n+1} - \vec{r}_i^n}{\|\vec{r}_i^{n+1} - \vec{r}_i^n\|} = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i) \tag{8}$$

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{r}_j^{m+1} - \vec{r}_j^m}{\|\vec{r}_j^{m+1} - \vec{r}_j^m\|} = (\cos \alpha_j, \cos \beta_j, \cos \gamma_j) \tag{9}$$

où  $\cos \alpha_k$ ,  $\cos \beta_k$  et  $\cos \gamma_k$  sont des cosinus directeurs associés au segment de contour  $L_k$ . Des formules (6) et (7), en tenant compte des formules (8) et (9), nous déduisons les expressions différentielles suivantes :

$$d\vec{r}_i = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i) dl_i \tag{10}$$

$$d\vec{r}_j = (\cos \alpha_j, \cos \beta_j, \cos \gamma_j) dl_j \tag{11}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$dx_i dx_j = \cos \alpha_i \cos \alpha_j dl_i dl_j \tag{12}$$

$$dy_i dy_j = \cos \beta_i \cos \beta_j dl_i dl_j \tag{13}$$

$$dz_i dz_j = \cos \gamma_i \cos \gamma_j dl_i dl_j \tag{14}$$

Désignons maintenant par  $I$  et  $J$  le nombre de segments formant respectivement les frontières des  $\partial A_i$  et  $\partial A_j$  et introduisons les formules (12)–(14) dans (5), nous obtenons pour la valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$  l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \oint_{L_i} \oint_{L_j} \ln r dl_i dl_j \tag{15}$$

avec :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \beta_i \cos \beta_j + \cos \gamma_i \cos \gamma_j \tag{16}$$

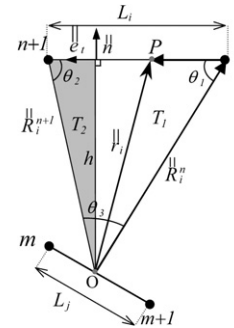


Fig. 3. Définition du triangle père  $T$ .

Posons la définition suivante :

$$K(L_j) = \oint_{L_j} \ln r dl_j \tag{17}$$

l'intégrale (15) devient alors :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \left\{ \oint_{L_i} K(L_j) dl_j \right\} \tag{18}$$

### 2.2. Intégration analytique des termes singuliers de $K(L_j)$

Soit  $\vec{R}_i^n$  et  $\vec{R}_i^{n+1}$  les vecteurs positions des noeuds  $n$  et  $n + 1$ , appartenant au segment de contour  $L_i \in \partial A_i$ , par rapport à un point arbitraire  $O$  de  $L_j \in \partial A_j$ . Le triangle  $T$  formé par ces vecteurs peut être décrit mathématiquement par la formule vectorielle suivante (voir Fig. 3) :

$$\vec{R}_i^n + \vec{L}_i = \vec{R}_i^{n+1} \tag{19}$$

Afin de faire apparaître les propriétés intrinsèques du triangle père  $T$ , nous considérons les angles aux trois sommets ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) et les trois longueurs des côtés ( $R_i^n, L_i, R_i^{n+1}$ ). Pour le besoin de l'intégration, subdivisons le triangle père  $T$  en deux sous triangles rectangles  $T_1$  et  $T_2$  (voir Fig. 3) et considérons le vecteur position  $\vec{r}$  d'un point  $P$  quelconque du segment de droite  $L_i$ . Dans ces conditions (voir Annexe A), l'expression de la surface radiative (18) devient :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \{ (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \cdot (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c) \} \tag{20}$$

avec :

$$\Gamma_{ij}^a = \oint_{L_j} \{ R_i^n(L_j) \cos \theta_1(L_j) \ln [R_i^n(L_j)] \} dl_j \tag{21}$$

$$\Gamma_{ij}^b = \oint_{L_j} \{ R_i^{n+1}(L_j) \cos \theta_2(L_j) \ln [R_i^{n+1}(L_j)] \} dl_j \tag{22}$$

$$\Gamma_{ij}^c = \oint_{L_j} \{ h(L_j) \theta_3(L_j) - L_i \} dl_j \tag{23}$$

À ce stade, il faut distinguer trois situations pour le calcul de la valeur de la surface radiative mutuelle, à savoir :

- les segments  $L_i$  et  $L_j$  ne sont pas confondus mais le noeud  $n$  de  $L_i$  coïncide avec le segment de  $L_j$ .
- les segments  $L_i$  et  $L_j$  ne sont pas confondus mais le noeud  $n + 1$  de  $L_i$  coïncide avec le segment de  $L_j$ .
- les segments  $L_i$  et  $L_j$  sont confondus en totalité ou en partie.

2.2.1. Cas où le noeud  $n$  de  $L_i$  touche  $L_j$

Dans le cas où le noeud  $n$  du segment  $L_i$  se trouve sur le segment  $L_j$  (voir Fig. 4), on peut alors intégrer analytiquement  $\Gamma_{ij}^a$ . En effet, l'angle  $\theta_1$ , apparaissant dans (21), est indépendant de  $L_j$ . Géométriquement,  $\cos \theta_1$  représente le produit scalaire entre les vecteurs directionnels  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  :

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \beta_i \cos \beta_j + \cos \gamma_i \cos \gamma_j \end{aligned} \quad (24)$$

et l'expression (21) deviens alors :

$$\Gamma_{ij}^a = \cos \theta_1 \int_{\Delta L_j^{m,n}}^{\Delta L_j^{m+1,n}} \{R_i^n(L_j) \ln[R_i^n(L_j)]\} dl_j \quad (25)$$

où  $\Delta L_j^{m,n}$  représente la distance entre les noeuds  $m \in L_j$  et  $n \in L_i$ .  $\Delta L_j^{m+1,n}$  représente la distance entre les noeuds  $m \in L_j$  et  $(n + 1) \in L_i$ . En utilisant la formule d'intégration suivante :

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) \quad (26)$$

il vient alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^a &= \frac{\cos \theta_1}{2} (\Delta L_j^{m+1,n})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m+1,n} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\cos \theta_1}{2} (\Delta L_j^{m,n})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m,n} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

2.2.2. Cas où le noeud  $n + 1$  de  $L_i$  touche  $L_j$

Dans le cas où le noeud  $n + 1$  du segment  $L_i$  se trouve sur le segment  $L_j$  (voir Fig. 5), on peut intégrer analytiquement  $\Gamma_{ij}^b$ . En effet, l'angle  $\theta_2$ , apparaissant dans (22), est alors indépendant de  $L_j$ . Géométriquement,  $\cos \theta_2$  représente le produit scalaire entre les vecteurs directionnels  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  :

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \beta_i \cos \beta_j + \cos \gamma_i \cos \gamma_j \end{aligned} \quad (28)$$

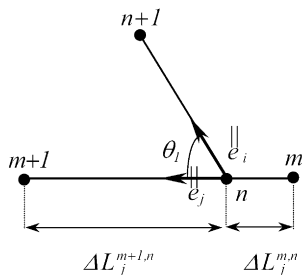


Fig. 4. Cas où le noeud  $n$  de  $L_i$  touche  $L_j$ .

et l'expression (22) devient, alors :

$$\Gamma_{ij}^b = \cos \theta_2 \int_{\Delta L_j^{m,n+1}}^{\Delta L_j^{m+1,n+1}} \{R_i^{n+1}(L_j) \ln[R_i^{n+1}(L_j)]\} dl_j \quad (29)$$

où  $\Delta L_j^{m,n+1}$  représente la distance entre les noeuds  $m \in L_j$  et  $(n + 1) \in L_i$  et  $\Delta L_j^{m+1,n+1}$  représente la distance entre les noeuds  $(m + 1) \in L_j$  et  $(n + 1) \in L_i$ . En utilisant la formule (26), on obtient après intégration de (29) la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^b &= \frac{\cos \theta_2}{2} (\Delta L_j^{m+1,n+1})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m+1,n+1} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\cos \theta_2}{2} (\Delta L_j^{m,n+1})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m,n+1} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

2.2.3. Cas où  $L_i$  et  $L_j$  sont partiellement confondus

Lorsque le segment  $L_i$  se trouve sur le segment  $L_j$  (voir Fig. 6), l'expression du facteur de forme se calcule analytiquement. En effet, dans ce cas  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,  $h = 0$  et

$$\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \cos \beta_i \cos \beta_j + \cos \gamma_i \cos \gamma_j = 1 \quad (31)$$

et on a alors, pour la surface mutuelle  $F_{ij}$ , l'expression suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \{(\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c)\} \quad (32)$$

avec :

$$\Gamma_{ij}^a = \int_{\Delta L_j^{m,n}}^{\Delta L_j^{m+1,n}} \{R_i^n(L_j) \ln[R_i^n(L_j)]\} dl_j \quad (33)$$

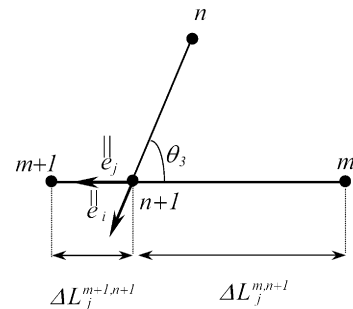


Fig. 5. Cas où le noeud  $(n + 1) \in L_i$  de  $L_i$  touche  $L_j$ .

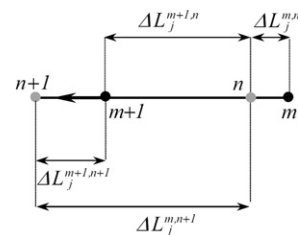


Fig. 6. Cas où  $L_i$  et  $L_j$  sont partiellement confondus.

$$\Gamma_{ij}^b = \int_{\Delta L_j^{m,n+1}}^{\Delta L_j^{m+1,n+1}} \{R_i^{n+1}(L_j) \ln[R_i^{n+1}(L_j)]\} dl_j \quad (34)$$

$$\Gamma_{ij}^c = \int_{\Delta L_j^m}^{\Delta L_j^{m+1}} \{L_i\} dl_j \quad (35)$$

qui, après intégration, devient :

$$\Gamma_{ij}^a = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta L_j^{m+1,n})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m+1,n} - \frac{1}{2} \right) - (\Delta L_j^{m,n})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m,n} - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (36)$$

$$\Gamma_{ij}^b = \frac{1}{2} (\Delta L_j^{m+1,n+1})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m+1,n+1} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} (\Delta L_j^{m,n+1})^2 \left( \ln \Delta L_j^{m,n+1} - \frac{1}{2} \right) \quad (37)$$

$$\Gamma_{ij}^c = L_i L_j \quad (38)$$

2.3. Traitement numérique

L'évaluation de la valeur de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$ , donnée par la formule classique (1) relativement à un couple de surfaces réelles ( $A_i, A_j$ ), peut être effectuée sur un couple de surfaces de références ( $a_i, a_j$ ) via la formule suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \int_{a_i} \int_{a_j} \Psi(\xi, \eta) \det(J(\xi)) \det(J(\eta)) da_i da_j \quad (39)$$

où  $\Psi(\xi, \eta)$  est une fonction qui n'est pas nécessairement régulière dans son domaine. Les termes  $\det(J(\xi))$  et  $\det(J(\eta))$  sont respectivement les jacobiens des transformations géométriques des éléments réels  $A_i$  et  $A_j$  sur les éléments de références  $a_i$  et  $a_j$ . L'intégration explicite de (39), par la quadrature de Gauss par exemple, n'est possible que si elle est constituée de termes polynômiaux. Dans le cas de la méthode de Gauss [16], l'intégration explicite des monômes sur les éléments de références ( $a_i, a_j$ ) nous permet d'écrire :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m W_i W_j \Psi(\xi_i, \eta_j) \times \det(J(\xi_i)) \det(J(\eta_j)) \quad (40)$$

où  $m$  est le nombre de points d'intégration nécessaire pour intégrer exactement un polynôme de degré  $n$  ( $2n - 1 \leq m \leq n^2$ ).  $W_i$  et  $W_j$  sont respectivement les coefficients de pondération associés aux points de Gauss d'abscisses  $\xi_i$  et  $\eta_i$ . Dans la pratique, le choix des nombres d'intégrations dépend de la forme du domaine dans lequel l'intégration s'effectue.

Finalement, soulignons que cette méthode est applicable aussi pour la formule d'intégration de contour (2), pour le calcul de la valeur de la surface radiative. Dans ce cas, pour des segments de contour rectilignes, il faut utiliser une intégration sur des segments de référence  $l \in [-1, 1]$ .

Pour évaluer les termes  $\Gamma_{ij}^a, \Gamma_{ij}^b$  et  $\Gamma_{ij}^c$  qui interviennent dans (20), nous faisons appel à une technique d'intégration numérique sur un segment de droite. Ainsi, si on transforme l'intégration sur le segment  $L_j$  en une intégration sur un segment  $l \in [-1, 1]$ , la formule (20) prend la forme générale suivante :

$$I = \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi \quad (41)$$

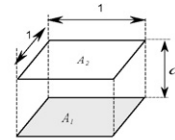
qui, dans le cas de l'application de la formule de quadrature de Gauss, s'écrit :

$$I = \int_{-1}^1 P(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i P(\xi) \quad (42)$$

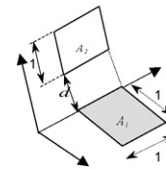
2.4. Validation de l'approche semi-analytique de frontière

Dans cette partie, nous comparons les résultats obtenus par la méthode semi-analytique de frontière avec ceux obtenus par des méthodes analytiques pour trois types de configurations (Fig. 7) [5–7,17].

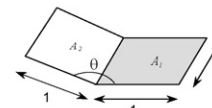
Dans les deux premiers cas, la convergence vers la valeur exacte est uniforme et l'erreur relative est une fonction décroissante de la variable distance  $d$ . En effet, pour des distances  $d$



d	Analytical	Pts of integration			
		1	3	5	7
0	1	0.979673	0.999994	1	1
0.001	0.998006	1.100636	1.000346	0.998366	0.998031
0.01	0.980417	1.082791	0.9826049	0.98068	0.980421
0.1	0.826994	0.918221	0.82683	0.826934	0.826994
1	0.199825	0.208685	0.199829	0.199825	0.199825
10	0.003162	0.003165	0.003162	0.003162	0.003162



d	Analytical	Pts of integration			
		1	3	5	7
0	0.200044	0.192747	0.2000411	0.200044	0.200044
0.001	0.199611	0.223059	0.200195	0.199701	0.199631
0.01	0.195799	0.219231	0.196345	0.195865	0.195799
0.1	0.162823	0.183887	0.162781	0.162808	0.162823
1	0.032809	0.034735	0.03281	0.032809	0.032809
10	0.000136	0.000137	0.000136	0.000136	0.000136



Angle theta	Analytical	Pts of integration			
		1	3	5	7
30	0.619028	0.63641	0.619481	0.61909	0.61903
60	0.370905	0.362911	0.371048	0.370928	0.370905
90	0.200044	0.192747	0.200041	0.200044	0.200044
120	0.086615	0.088802	0.086757	0.086638	0.086615
150	0.021345	0.032209	0.021781	0.021413	0.021348

Fig. 7. Analyse des différentes techniques de calcul de  $F_{ij}$ .

prochent de zéro et des erreurs relatives inférieures à 0.01 %, le nombre de points de Gauss à utiliser doit être supérieur à 5. Par contre, pour des distances  $d \geq 1$  et des erreurs relatives inférieures à 0.001 %, la convergence nécessite alors 3 points de Gauss.

Dans le troisième cas, nous remarquons encore que la convergence vers la valeur exacte est uniforme, et l'erreur relative reste inférieure à 0.01 % pour plus de 5 points de Gauss.

Ces exemples montrent clairement que la méthode semi-analytique de frontière, pour le calcul de la valeur de la surface radiative mutuelle, est robuste et pourra être, sans difficulté, combinée à d'autres techniques numériques (méthode des éléments finis ou de frontières) pour analyser des problèmes d'ingénierie (transfert de chaleur dans les systèmes de combustion, remplissage de moules, procédés de thermoformage et d'extrusion-soufflage, optique, etc.)

Finalement, soulignons que l'application de la technique d'intégration de Gauss aux formules (1) et (2) pour le calcul de  $F_{ij}$ , entre deux surfaces arbitraires et voisines, peut s'avérer insuffisant, comme le montre la section suivante.

### 2.5. Analyse comparative des méthodes de calcul du facteur de forme

On se propose de calculer numériquement la valeur de la surface radiative mutuelle,  $F_{ij}$ , pour les quatre cas suivants : deux cas sans singularité et deux autres cas avec singularité (frontière commune entre deux surfaces) :

- Cas 1 :** les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont des carrés parallèles de 1.0 m de côté et sont situées à 1 m l'une de l'autre.
- Cas 2 :** les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont des carrés perpendiculaires de 1.0 m de côté, mais ils ont un côté en commun.
- Cas 3 :** les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont des triangles rectangles parallèles, dont les deux côtés qui forment l'angle droit sont unitaires, et sont situées à 1 m l'une de l'autre.
- Cas 4 :** les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont des triangles rectangles, dont les deux côtés qui forment l'angle droit sont de longueurs unitaires et sont perpendiculaires, et elles ont un côté en commun.

Pour la validation, nous avons confronté nos résultats, d'une part, avec la solution analytique [5,6,17] et, d'autre part, avec les résultats obtenus avec trois différentes techniques que nous avons programmées, soit : méthode de subdivision des surfaces (*Aera integration*), méthode de quadrature de Gauss et la méthode classique de Contour. Pour la méthode de subdivision des surfaces, nous avons considéré les maillages R1, R2 et R3 pour la surface carrée et les maillages T1, T2 et T3 pour la surface triangulaire (voir Fig. 8). Pour la méthode de quadrature de Gauss, le nombre maximum de points de Gauss considéré pour l'intégration est de sept points pour la surface carrée et de douze points pour la surface triangulaire. Finalement, pour la méthode de contour et la méthode semi-analytique de contour, nous avons considéré un maximum de cinq points d'intégration. Le

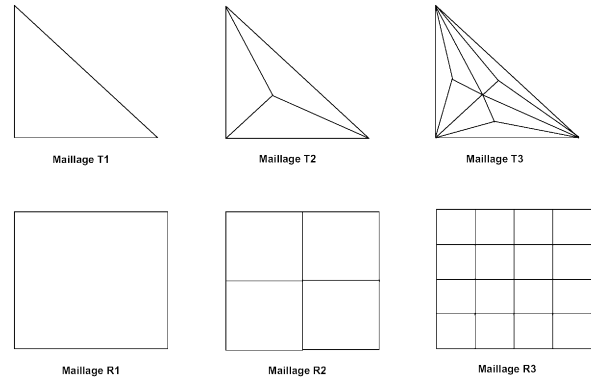
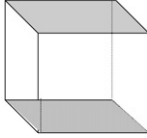
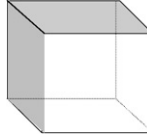
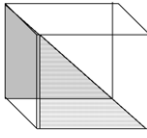
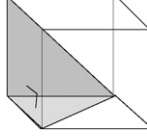


Fig. 8. Types de maillage utilisés pour la méthode aera-integration.

Tableau 1 résume les résultats numériques obtenus dans chacun des cas et donne l'erreur en pourcentage.

- Dans le premier cas, la convergence vers la valeur exacte est uniforme et l'erreur relative est inférieure à 2.45 % pour la méthode aera integration, pour maillage R3. Dans le cas de la méthode de quadrature de Gauss, l'erreur relative est inférieure à 1.1 % pour une intégration à plus de trois points de Gauss. Dans le cas de la méthode de Contour, l'erreur relative est inférieure à 0.02 % pour une intégration à plus de trois points. En ce qui concerne la méthode semi-analytique, développée dans cet article, l'erreur relative est presque nulle pour une intégration à plus de trois points.
- Dans le deuxième cas, on remarque que l'utilisation des méthodes standards ne permet pas d'assurer la convergence uniforme. En effet, pour la méthode de quadrature de Gauss, il n'y a pas de convergence, et l'erreur relative la plus faible (2.13 %) est obtenue par l'utilisation de 3 points de Gauss. Pour la méthode aera integration, l'erreur la plus faible (14.39 %) est obtenue pour le maillage R3. Pour une précision plus élevée, il faut alors utiliser un maillage plus raffiné que R3. Dans le cas de la méthode de Contour, il n'y a pas de solution. En effet, la distance entre deux points appartenant respectivement aux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  est nulle sur leurs côtés communs. Pour la méthode semi-analytique, la convergence vers la valeur exacte est uniforme et l'erreur relative est nulle pour une intégration à plus de trois points.
- Dans le troisième cas, les deux surfaces  $A_i$  et  $A_j$  sont des triangles rectangles parallèles, la convergence vers la valeur exacte est uniforme et l'erreur relative est inférieure à 7.56 % pour la méthode aera-integration, pour le maillage T3. Dans le cas de la méthode de quadrature de Gauss, l'erreur relative est inférieure à 1.33 % pour une intégration à plus de trois points de Gauss. Dans le cas de la méthode de Contour, l'erreur relative est inférieure à 0.04 % pour une intégration à plus de trois points. Finalement, l'erreur relative est presque nulle pour une intégration à plus de trois points, pour la méthode semi-analytique de contour.
- Dans le quatrième cas, on remarque que l'utilisation des méthodes standards ne permet pas d'assurer la convergence uniforme. En effet, pour la méthode de quadrature

Tableau 1  
Validation de cas  $F_{ij}$  pour des carrées et des triangles

					
Aera-integration	Subdivisions	Results	Erreur %	Results	Erreur %
	Maillage R1	0.31831	59.29	0.31831	59.12
	Maillage R2	0.216804	8.50	0.264046	31.99
	Maillage R3	0.204724	2.45	0.22883	14.39
Quadratic Gauss	Pts Gauss				
	3	0.197238	1.29	0.195784	2.13
	4	0.19775	1.04	0.301731	50.83
	7	0.20013	0.15	0.479857	139.88
Contour-integral	Pts Gauss				
	1	0.220636	10.41	diverge	diverge
	2	0.199383	0.22	diverge	diverge
	3	0.199835	0.01	diverge	diverge
	4	0.199825	–	diverge	diverge
	5	0.199825	–	diverge	diverge
Semi-analytical	Pts Gauss				
	1	0.208685	4.43	0.192747	3.65
	2	0.199579	0.12	0.200201	0.08
	3	0.199829	0.00	0.200041	0.00
	4	0.199825	–	0.200044	–
	5	0.199825	–	0.200044	–
Exact value		0.199825		0.200044	
					
Aera-integration	Maillage	Results	Erreur %	Results	Erreur %
	Maillage T1	0.159155	38.34	0.358099	69.45
	Maillage T2	0.134023	16.50	0.486731	130.32
	Maillage T3	0.123739	7.56	0.559265	164.65
Quadratic Gauss	Pts Gauss				
	1	0.159155	38.34	0.358099	69.45
	3	0.114041	0.87	0.363936	72.22
	4	0.113515	1.33	0.418832	98.19
	7	0.115134	0.08	0.418871	98.21
	12	0.115051	0.01	0.374669	77.30
Contour-integral	Pts Gauss				
	1	0.142058	16.50	diverge	diverge
	2	0.114598	0.04	diverge	diverge
	3	0.11511	0.04	diverge	diverge
	4	0.115048	–	diverge	diverge
	5	0.115049	–	diverge	diverge
Semi-analytical	Pts Gauss				
	1	0.123129	7.03	0.194884	7.78
	2	0.114626	0.36	0.2082296	1.46
	3	0.115071	0.02	0.21079	0.25
	4	0.115048	–	0.211113	0.10
	5	0.115049	–	0.211235	0.04
Exact value		0.115045		0.211324	

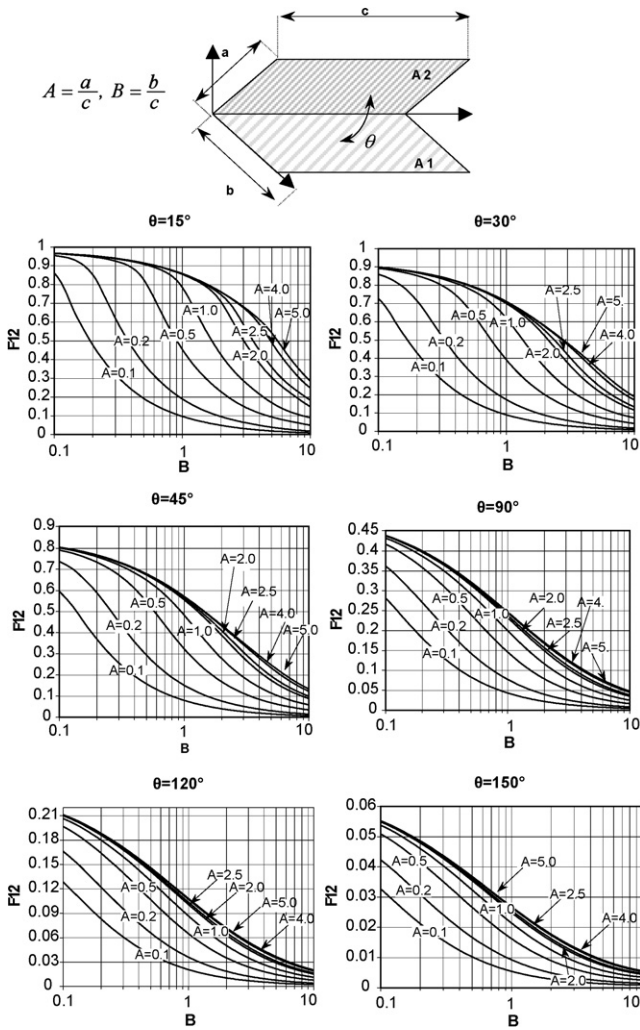


Fig. 9. Abaque relative à deux rectangles.

de Gauss, il n’y a pas de convergence et l’erreur relative la plus faible (69.45 %) est obtenue par l’utilisation de 3 points de Gauss. Pour la méthode aera integration, l’erreur la plus faible (69.45 %) est obtenue pour le maillage T3. Dans le cas de la méthode de de Contour, même remarque que précédemment : il n’y a pas de solution. Pour la méthode semi-analytique, la convergence vers la valeur exacte est uniforme et l’erreur relative est de 0.25 % pour une intégration à plus de trois points.

2.6. Application de la méthode semi-analytique de contour pour la construction d’abaques

Vu la qualité médiocre des méthodes classiques, pour le calcul des valeurs des surfaces mutuelles, dans le cas où une paire de surfaces possède un ou plusieurs côtés en commun, nous nous intéressons à la méthode semi-analytique.

Dans cette partie, nous nous intéressons à l’application de la méthode semi-analytique de contour pour la construction de quelques abaques pour des paires de surfaces rectangles et des paires de surfaces triangles, possédant un côté en commun. Les exemples considérés sont : (i) deux surfaces rectangulaires for-

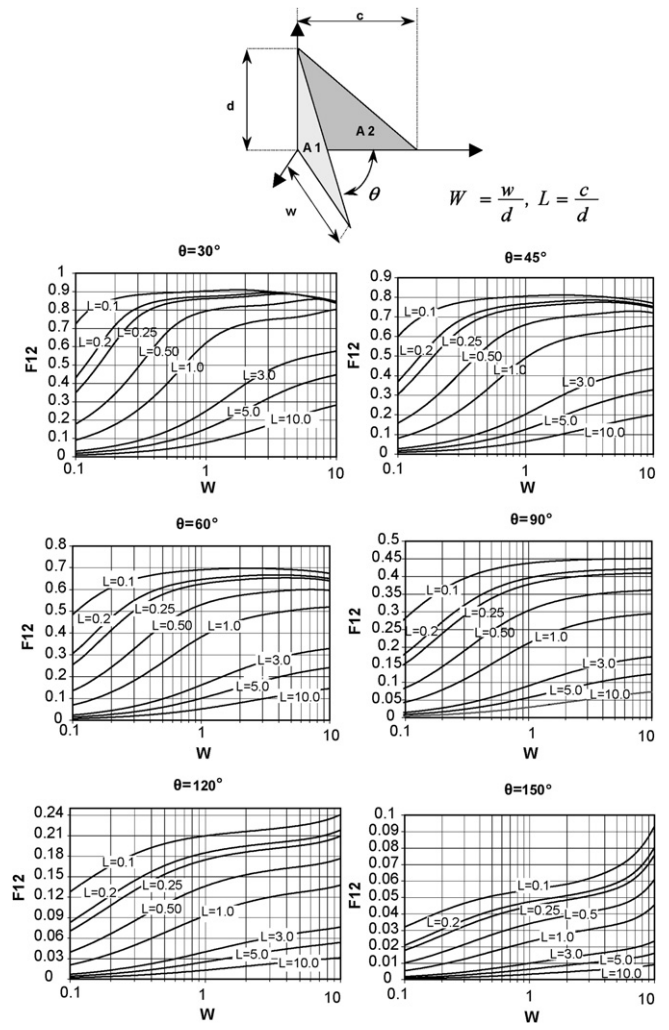


Fig. 10. Abaque relative à deux triangles rectangles.

mant un angle  $\theta$  entre elles et (ii) deux surfaces triangulaires rectangles, formant, elles aussi, un angle  $\theta$ . Les abaques que nous avons construits, pour différents angles et distances, sont présentés dans les abaques ci-dessous (Figs. 9 et 10).

3. Conclusion

Dans le cadre de ce travail, nous avons présenté une technique semi-analytique, basée sur une approche intégrale de contour, pour le calcul numérique de la valeur de la surface de radiation mutuelle  $F_{ij}$ . L’avantage de cette technique est double : (i) il contourne le problème de singularité lié au calcul de  $F_{ij}$  dans le cas où une paire de surfaces possède une région commune et (ii) il réduit le temps de calcul, puisque l’intégration numérique s’effectue sur un seul contour de surface et non sur deux, comme c’est le cas pour la méthode classique de contour. Ensuite, nous avons présenté une analyse comparative de cette technique avec différentes autres techniques numériques d’intégration numérique.

Finalement, en se basant sur la méthode semi-analytique de contour, nous avons construit quelques abaques pour des paires de surfaces rectangulaires et triangulaires possédant un côté en commun.



Ces travaux préliminaires sont nécessaires pour nos travaux futurs sur la modélisation et la simulation des procédés de mises en forme des matériaux thermoplastiques, en particulier les procédés de moulage par extrusion-soufflage et de thermoformage.

**Annexe A**

Sur une base orthonormée, formée par le vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  et le vecteur tangentiel  $\vec{e}_t$ , on a l’une ou l’autre des deux situations suivantes pour le vecteur position  $\vec{r}$  :

- si le point  $P$  se trouve sur  $L_i \in \partial T_1$  :

$$\vec{r} = R_i^n \sin \theta_1 \vec{n} - t R_i^n \cos \theta_1 \vec{e}_t$$

avec  $l_i = -t R_i^n \cos \theta_1$  (A.1)

$$r = R_i^n \sqrt{\sin^2 \theta_1 + t^2 \cos^2 \theta_1}$$

avec  $dl_i = -R_i^n \cos \theta_1 dt$  (A.2)

- si le point  $P$  se trouve sur  $L_i \in \partial T_2$  :

$$\vec{r} = R_i^{n+1} \sin \theta_2 \vec{n} + t R_i^{n+1} \cos \theta_2 \vec{e}_t$$

avec  $l_i = +t R_i^{n+1} \cos \theta_2$  (A.3)

$$r = R_i^{n+1} \sqrt{\sin^2 \theta_2 + t^2 \cos^2 \theta_2}$$

avec  $dl_i = +R_i^{n+1} \cos \theta_2 dt$  (A.4)

où  $t$  est un paramètre scalaire qui varie entre 0 et 1. En considérant les expressions de  $r$  et de  $dl_i$ , relativement aux triangles  $T_1$  et  $T_2$ , l’intégrale  $K(L_j)$ , donné par (17), devient alors :

$$K(L_j) = -R_i^n \cos \theta_1 \int_1^0 \ln(R_i^n \sqrt{\sin^2 \theta_1 + t^2 \cos^2 \theta_1}) dt$$

$$+ R_i^{n+1} \cos \theta_2 \int_0^1 \ln(R_i^{n+1} \sqrt{\sin^2 \theta_2 + t^2 \cos^2 \theta_2}) dt$$

(A.5)

qui s’écrit encore :

$$K(L_j) = -R_i^n \cos \theta_1 \left( -\ln R_i^n + \frac{1}{2} I \right)$$

$$+ R_i^{n+1} \cos \theta_2 \left( \ln R_i^{n+1} + \frac{1}{2} J \right)$$

(A.6)

avec :

$$I = I(\theta_1) = \int_1^0 \ln(\sin^2 \theta_1 + t^2 \cos^2 \theta_1) dt$$

(A.7)

$$J = J(\theta_2) = \int_0^1 \ln(\sin^2 \theta_2 + t^2 \cos^2 \theta_2) dt$$

(A.8)

Considérons la décomposition complexe suivante :

$$\sin^2 \theta + t^2 \cos^2 \theta = (\sin \theta + it \cos \theta)(\sin \theta - it \cos \theta)$$

(A.9)

où  $i$  est un nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ . Les intégrales  $I$  et  $J$  s’écrit respectivement :

$$I(\theta_1) = I_1(\theta_1) + I_2(\theta_1)$$

(A.10)

$$J(\theta_2) = -I(\theta_2)$$

(A.11)

avec :

$$I_1(\theta_1) = \int_1^0 \ln(\sin \theta_1 + it \cos \theta_1) dt$$

(A.12)

$$I_2(\theta_1) = \int_1^0 \ln(\sin \theta_1 - it \cos \theta_1) dt$$

(A.13)

Pour le calcul des intégrales  $I_1(\theta_1)$  et  $I_2(\theta_1)$ , considérons les changements de variables suivantes :

$$X = \sin \theta_1 + it \cos \theta_1 \quad \text{avec } dt = -\frac{i}{\cos \theta_1} dX$$

(A.14)

$$Y = \sin \theta_1 - it \cos \theta_1 \quad \text{avec } dt = +\frac{i}{\cos \theta_1} dY$$

(A.15)

et les formules complexes suivantes :

$$\sin \theta + it \cos \theta = \exp \left\{ i \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\}$$

(A.16)

$$\sin \theta - it \cos \theta = \exp \left\{ i \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

(A.17)

il vient alors :

$$I_1(\theta_1) = -\frac{i}{\cos \theta_1} \int_{\exp\{i(\frac{\pi}{2}-\theta_1)\}}^{\sin \theta_1} \ln(X) dX$$

(A.18)

$$I_2(\theta_1) = \frac{i}{\cos \theta_1} \int_{\exp\{i(\theta_1-\frac{\pi}{2})\}}^{\sin \theta_1} \ln(Y) dY$$

(A.19)

ce qui donne après intégration :

$$I_1(\theta_1) = \frac{i}{\cos \theta_1} \left( \left[ i \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - 1 \right] \exp^{i(\frac{\pi}{2}-\theta_1)} \right.$$

$$\left. - \sin \theta_1 [\ln(\sin \theta_1) - 1] \right)$$

(A.20)

$$I_2(\theta_1) = -\frac{i}{\cos \theta_1} \left( \left[ i \left( \theta_1 - \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right] \exp^{i(\theta_1-\frac{\pi}{2})} \right.$$

$$\left. - \sin \theta_1 [\ln(\sin \theta_1) - 1] \right)$$

(A.21)

En additionnant (A.20) et (A.21), nous obtenons pour l’intégrale (A.10) la formule suivante :

$$I(\theta_1) = -\pi \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} + 2\theta_1 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} + 2$$

(A.22)

et de la formule (A.11), nous déduisons l’expression suivante pour  $J(\theta_2)$  :

$$J(\theta_2) = \pi \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - 2\theta_2 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - 2$$

(A.23)

Introduisons les expressions de  $I$ , donnée par (A.22), et de  $J$ , donnée par (A.23), dans la formule (A.5), nous obtenons :

$$K(L_j) = -R_i^n \cos \theta_1 \left\{ -\ln R_i^n + \frac{1}{2} \left( -\pi \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} + 2\theta_1 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} + 2 \right) \right\} + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \left\{ +\ln R_i^{n+1} + \frac{1}{2} \left( +\pi \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - 2\theta_2 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - 2 \right) \right\} \quad (A.24)$$

soit, après arrangement :

$$K(L_j) = R_i^n \cos \theta_1 \ln R_i^n + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \ln R_i^{n+1} + R_i^n \sin \theta_1 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) + R_i^{n+1} \sin \theta_2 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) - (R_i^n \cos \theta_1 + R_i^{n+1} \cos \theta_2) \quad (A.25)$$

Comme :

$$R_i^n \sin \theta_1 = R_i^{n+1} \sin \theta_2 = h \quad (A.26)$$

et

$$L_i = R_i^n \cos \theta_1 + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \quad (A.27)$$

où  $h$  est la hauteur du triangle père  $T$  au point  $O$ , relativement au segment de contour  $L_j$ , il vient alors :

$$K(L_j) = R_i^n \cos \theta_1 \ln R_i^n + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \ln R_i^{n+1} + h(\pi - \theta_1 - \theta_2) - L_i \quad (A.28)$$

et puisque :

$$\theta_3 = \pi - \theta_1 - \theta_2 \quad (A.29)$$

il vient finalement pour l'intégrale (A.25) l'expression suivante :

$$K(L_j) = R_i^n \cos \theta_1 \ln R_i^n + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \ln R_i^{n+1} + h\theta_3 - L_i \quad (A.30)$$

Introduisons la valeur de l'intégral  $K(L_j)$ , ci-dessus, dans l'expression de la surface radiative mutuelle  $F_{ij}$ , donnée par (18), nous obtenons :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \times \int_{L_j} \left\{ R_i^n \cos \theta_1 \ln R_i^n + R_i^{n+1} \cos \theta_2 \ln R_i^{n+1} + h\theta_3 - L_i \right\} dl_j \quad (A.31)$$

où :

$$R_i^n = R_i^n(L_j), \quad R_i^{n+1} = R_i^{n+1}(L_j), \quad h = h(L_j) \\ \theta_1 = \theta_1(L_j), \quad \theta_2 = \theta_2(L_j), \quad \theta_3 = \theta_3(L_j) \quad (A.32)$$

Simplifions l'écriture de la formule (A.31) en utilisant les définitions suivantes :

$$\Gamma_{ij}^a = \oint_{L_j} \left\{ R_i^n(L_j) \cos \theta_1(L_j) \ln [R_i^n(L_j)] \right\} dl_j \quad (A.33)$$

$$\Gamma_{ij}^b = \oint_{L_j} \left\{ R_i^{n+1}(L_j) \cos \theta_2(L_j) \ln [R_i^{n+1}(L_j)] \right\} dl_j \quad (A.34)$$

$$\Gamma_{ij}^c = \oint_{L_j} \left\{ h(L_j)\theta_3(L_j) - L_i \right\} dl_j \quad (A.35)$$

il vient alors pour le facteur de forme l'expression compacte suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \cdot (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c) \right\} \quad (A.36)$$

### Références

- [1] K. Hartwig, Simulation of the stretch-Blow molding process and characterization of the relevant material behavior, Dissertation, RWTH, Aachen, 1996.
- [2] M.R. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, Effect of temperature profiles trough preform thickness on the properties of reheat-Blown PET containers, Adv. Polymer Technol. 17 (3) (1998) 237–249.
- [3] A. Charette, F. Erchiqui, Y.S. Kocaefe, The imaginary planes method for the calculation of radiative heat transfer in industrial furnaces, Canad. J. Chim. Engrg. 67 (1989) 378–384.
- [4] F. Kreith, Principles of Heat Transfer, International Textbook, Scranton, 1959.
- [5] H.C. Hottel, Radiant heat transmission between surfaces separated by non-absorbing media, Trans. ASME 53 (1931) 265–273, FSP-53-196.
- [6] A. Feingold, Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 292 (1428) (1966) 51–60.
- [7] D.C. Hamilton, W.R. Morgan, Radiant-interchange configuration factors, NASA TN 2836, 1952.
- [8] F.P. Incropera, D.P. Dewitt, Introduction to Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [9] B.T.F. Chung, M.M. Kermani, Radiation view factors from a finite rectangular plate, J. Heat Transfer 111 (4) (1989) 1115–1117.
- [10] D.W. McAdam, A.K. Khatri, M. Iqbal, Configuration factors for greenhouses, Am. Soc. Ag. Engineers 14 (6) (1971) 1068–1092.
- [11] R. Siegel, J.R. Howell, Thermal Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [12] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [13] C.K. Krishnaprakas, View-factor evaluation by quadrature over triangles, J. Thermophysics 12 (1) (1997) 118–120 (Technical notes).
- [14] T.J. Chung, J.Y. Kim, Radiation view factors by finite elements, J. Heat Transfer 14 (1982) 792–795.
- [15] G.S.S. Rao, M.S. Choudhary, M.K. Naqvi, K.V. Rao, C. Di Blasi, V.M.K. Sastri, Efficient evaluation of diffuse view factors for radiation, Int. J. Heat Mass Transfer 39 (6) (1996) 1281–1286.
- [16] G. Dhatt, G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, 2ième éd., Collection Université de Compiègne, 1984.
- [17] J.R. Ehlert, T.F. Smith, View factors for perpendicular and parallel, rectangular plates, J. Thermophys. Heat Transfer 7 (1) (1993) 173–174.